Pruebas interesantes para una lógica multi-modal multi-agente:

Un caso de estudio sobre Completitud

Francisco Carbonari

Exposición sobre Tesina de Grado, Octubre 2015

Índice

Índice

Definición del lenguaje

Se basa en un conjunto numerable de variables proposicionales $P = \{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ y un conjunto $A = \{1, 2, \ldots, m\}$ de m agentes. El lenguaje lo denominamos $\mathcal{L}$, y se encuentra definido mediante la siguiente regla inductiva:

- Si $p \in P$, entonces $p \in \mathcal{L}_{prop}$;
- Si $p, q \in \mathcal{L}_{prop}$, entonces $\neg p, (p \wedge q) \in \mathcal{L}_{prop}$;
- Si $p \in \mathcal{L}_{prop}$; $i, k \in A$, entonces p, $\mathrm{Able}_i\, p$, $\mathrm{Does}_i\, p$, $\mathrm{Does}_i^k\, p \in \mathcal{L}$;
- Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$; $i, k \in A$, entonces $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $\mathrm{Goal}_i\, \varphi$, $\mathrm{Bel}_i\, \varphi$, $\mathrm{O}\, \varphi$, $\mathrm{O}^i\, \varphi$, $\mathrm{I}^i\, \varphi$, $\mathrm{Int}_i\, \varphi$, $\mathrm{Int}_i^k\, \varphi \in \mathcal{L}$.

¿Convenciones de notación? $(\varphi, \psi, p, q, i, k)$

Definición del lenguaje

Se basa en un conjunto numerable de variables proposicionales $P = \{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ y un conjunto $A = \{1, 2, \ldots, m\}$ de m agentes. El lenguaje lo denominamos $\mathcal{L}$, y se encuentra definido mediante la siguiente regla inductiva:

- Si $p \in P$, entonces $p \in \mathcal{L}_{prop}$;
- Si $p, q \in \mathcal{L}_{prop}$, entonces $\neg p, (p \wedge q) \in \mathcal{L}_{prop}$;
- Si $p \in \mathcal{L}_{prop}$; $i, k \in A$, entonces p, $\mathrm{Able}_i\, p$, $\mathrm{Does}_i\, p$, $\mathrm{Does}_i^k\, p \in \mathcal{L}$;
- Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$; $i, k \in A$, entonces $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $\mathrm{Goal}_i\, \varphi$, $\mathrm{Bel}_i\, \varphi$, $\mathrm{O}\, \varphi$, $\mathrm{O}^i\, \varphi$, $\mathrm{I}^i\, \varphi$, $\mathrm{Int}_i\, \varphi$, $\mathrm{Int}_i^k\, \varphi \in \mathcal{L}$.

¿Convenciones de notación? $(\varphi, \psi, p, q, i, k)$

Particionando el lenguaje

Particionamos el sistema comenzando por su lenguaje $\mathcal{L}$. Por un lado obteniendo el lenguaje $\mathcal{L}_{non}$, definido por la siguiente regla:

- Si $p \in P$, entonces $p \in \mathcal{L}_{non}$.
- Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{non}$, entonces $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{L}_{non}$.
- Si $\varphi \in \mathcal{L}_{non}$ e $i, k \in A$, entonces $\mathrm{Able}_i\varphi$, $\mathrm{Does}_i\varphi$, $\mathrm{Does}_i^k\varphi \in \mathcal{L}_{non}$.

Y por otro lado obteniendo el lenguaje $\mathcal{L}_{norm}$, definido por la siguiente regla:

- Si $p \in P$, entonces $p \in \mathcal{L}_{norm}$.
- Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{norm}$, entonces $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{L}_{norm}$.
- Si $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$ e $i, k \in A$, entonces $\mathrm{Goal}_i\varphi$, $\mathrm{Bel}_i\varphi$, $\mathrm{O}\varphi$, $\mathrm{O}^i\varphi$, $\mathrm{I}^i\varphi$, $\mathrm{Int}_i\varphi$, $\mathrm{Int}_i^k\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$.

Particionando el lenguaje

Particionamos el sistema comenzando por su lenguaje $\mathcal{L}$. Por un lado obteniendo el lenguaje $\mathcal{L}_{non}$, definido por la siguiente regla:

- Si $p \in P$, entonces $p \in \mathcal{L}_{non}$.
- Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{non}$, entonces $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{L}_{non}$.
- Si $\varphi \in \mathcal{L}_{non}$ e $i, k \in A$, entonces $\mathrm{Able}_i\varphi$, $\mathrm{Does}_i\varphi$, $\mathrm{Does}_i^k\varphi \in \mathcal{L}_{non}$.

Y por otro lado obteniendo el lenguaje $\mathcal{L}_{norm}$, definido por la siguiente regla:

- Si $p \in P$, entonces $p \in \mathcal{L}_{norm}$.
- Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{norm}$, entonces $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{L}_{norm}$.
- Si $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$ e $i, k \in A$, entonces $\mathrm{Goal}_i\varphi$, $\mathrm{Bel}_i\varphi$, $\mathrm{O}\varphi$, $\mathrm{O}^i\varphi$, $\mathrm{I}^i\varphi$, $\mathrm{Int}_i\varphi$, $\mathrm{Int}_i^k\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$.

Índice

Interpretamos las fórmulas mediante *modelos* I

Para las fórmulas de $\mathcal{L}_{norm}$, los modelos, (denominados *de Kripke*), tienen la forma:

$$\mathfrak{M} = \left\langle W, \{G_i\}_{i \in A}, \{B_i\}_{i \in A}, O, \left\{O^i\right\}_{i \in A}, \left\{Id^i\right\}_{i \in A}, \{I_i\}_{i \in A}, \left\{I_i^k\right\}_{i,k \in A}, V \right\rangle$$

donde,

W	es un conjunto no vacío;
V	es una función que asigna a cada variable proposicional $p_i \in P$ un subconjunto $V(p_i)$ de W;
$\{G_i\}_{i \in A}, \dots$	son familias de relaciones binarias sobre W.

Interpretamos las fórmulas mediante *modelos* II

Para las fórmulas de $\mathcal{L}_{non}$, los modelos, (denominados *tipo Neighbourhood*), tienen la forma:

$$\mathfrak{M} = \left\langle W, \{N_i^A\}_{i \in A}, \{N_i^D\}_{i \in A}, \{N_{i,k}^D\}_{i,k \in A}, V \right\rangle$$

donde,

W	es un conjunto no vacío, (como en el caso de los modelos de Kripke);
V	es una función que asigna a cada variable proposicional $p_i \in P$ un subconjunto $V(p_i)$ de W, (también como el caso de los modelos de Kripke);
$\{N_i^A\}_{i \in A}, \ldots$	son familias de mapeos desde W a conjuntos de subconjuntos de W.

Relación de *satisfacción* en los modelos

Siendo φ una fórmula y ω un estado en $\mathfrak{M} = \langle W, \ldots, V \rangle$, usamos el simbolismo

$$\mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi$$

como una abreviatura de, φ *se satisface en el estado* ω *de* $\mathfrak{M}$. Definimos inductivamente para las fórmulas *no-modales* (de acuerdo a su forma):

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{M}, \omega \vDash p_i & \textit{sii} & \omega \in V(p_i),\ \textit{para}\ i = 0, 1, 2, \ldots \\ \mathfrak{M}, \omega \vDash \neg\varphi & \textit{sii} & \textit{no se da}\ \ \mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi \\ \mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi \wedge \psi & \textit{sii} & \mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi\ \ \textit{y}\ \ \mathfrak{M}, \omega \vDash \psi,\ \textit{(se dan ambas)} \end{array}$$

Satisfacción para las fórmulas de $\mathcal{L}_{norm}$

Continuando las condiciones de satisfacción para las fórmulas no-modales, agregamos las condiciones de satisfacción para fórmulas que involucren operadores propios de $\mathcal{L}_{norm}$ (inductivamente):

$\mathfrak{M},\omega \vDash \mathrm{Goal}_i\,\varphi$	*sii*	$\forall\upsilon$ *en* $\mathfrak{M}$ *tal que* $\omega G_i \upsilon$, *se tiene* $\mathfrak{M},\upsilon \vDash \varphi$
$\mathfrak{M},\omega \vDash \mathrm{Bel}_i\,\varphi$	*sii*	$\forall\upsilon$ *en* $\mathfrak{M}$ *tal que* $\omega B_i \upsilon$, *se tiene* $\mathfrak{M},\upsilon \vDash \varphi$
$\mathfrak{M},\omega \vDash \mathrm{O}\,\varphi$	*sii*	$\forall\upsilon$ *en* $\mathfrak{M}$ *tal que* $\omega O \upsilon$, *se tiene* $\mathfrak{M},\upsilon \vDash \varphi$
$\mathfrak{M},\omega \vDash \mathrm{O}^i\,\varphi$	*sii*	$\forall\upsilon$ *en* $\mathfrak{M}$ *tal que* $\omega O^i \upsilon$, *se tiene* $\mathfrak{M},\upsilon \vDash \varphi$
$\mathfrak{M},\omega \vDash \mathrm{I}^i\,\varphi$	*sii*	$\forall\upsilon$ *en* $\mathfrak{M}$ *tal que* $\omega Id^i \upsilon$, *se tiene* $\mathfrak{M},\upsilon \vDash \varphi$
$\mathfrak{M},\omega \vDash \mathrm{Int}_i\,\varphi$	*sii*	$\forall\upsilon$ *en* $\mathfrak{M}$ *tal que* $\omega I_i \upsilon$, *se tiene* $\mathfrak{M},\upsilon \vDash \varphi$
$\mathfrak{M},\omega \vDash \mathrm{Int}_i^k\,\varphi$	*sii*	$\forall\upsilon$ *en* $\mathfrak{M}$ *tal que* $\omega I_i^k \upsilon$, *se tiene* $\mathfrak{M},\upsilon \vDash \varphi$

Satisfacción para las fórmulas de $\mathcal{L}_{norm}$

Continuando las condiciones de satisfacción para las fórmulas no-modales, agregamos las condiciones de satisfacción para fórmulas que involucren operadores propios de $\mathcal{L}_{norm}$ (inductivamente):

$\mathfrak{M}, \omega \vDash \mathrm{Goal}_i\, \varphi$	*sii*	$\forall \upsilon$ *en* $\mathfrak{M}$ *tal que* $\omega G_i \upsilon$, *se tiene* $\mathfrak{M}, \upsilon \vDash \varphi$
$\mathfrak{M}, \omega \vDash \mathrm{Bel}_i\, \varphi$	*sii*	$\forall \upsilon$ *en* $\mathfrak{M}$ *tal que* $\omega B_i \upsilon$, *se tiene* $\mathfrak{M}, \upsilon \vDash \varphi$
$\mathfrak{M}, \omega \vDash \mathrm{O}\, \varphi$	*sii*	$\forall \upsilon$ *en* $\mathfrak{M}$ *tal que* $\omega O \upsilon$, *se tiene* $\mathfrak{M}, \upsilon \vDash \varphi$
$\mathfrak{M}, \omega \vDash \mathrm{O}^i\, \varphi$	*sii*	$\forall \upsilon$ *en* $\mathfrak{M}$ *tal que* $\omega O^i \upsilon$, *se tiene* $\mathfrak{M}, \upsilon \vDash \varphi$
$\mathfrak{M}, \omega \vDash \mathrm{I}^i\, \varphi$	*sii*	$\forall \upsilon$ *en* $\mathfrak{M}$ *tal que* $\omega Id^i \upsilon$, *se tiene* $\mathfrak{M}, \upsilon \vDash \varphi$
$\mathfrak{M}, \omega \vDash \mathrm{Int}_i\, \varphi$	*sii*	$\forall \upsilon$ *en* $\mathfrak{M}$ *tal que* $\omega I_i \upsilon$, *se tiene* $\mathfrak{M}, \upsilon \vDash \varphi$
$\mathfrak{M}, \omega \vDash \mathrm{Int}_i^k\, \varphi$	*sii*	$\forall \upsilon$ *en* $\mathfrak{M}$ *tal que* $\omega I_i^k \upsilon$, *se tiene* $\mathfrak{M}, \upsilon \vDash \varphi$

Satisfacción para las fórmulas de $\mathcal{L}_{non}$

Para fórmulas que involucren operadores propios de $\mathcal{L}_{non}$, agregamos condiciones de satisfacción para las fórmulas no-modales, (inductivamente):

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{M}, \omega \vDash \mathrm{Able}_i\, \varphi & \textit{sii} & \|\varphi\|^{\mathfrak{M}} \in N_i^A(\omega) \\
\mathfrak{M}, \omega \vDash \mathrm{Does}_i\, \varphi & \textit{sii} & \|\varphi\|^{\mathfrak{M}} \in N_i^D(\omega) \\
\mathfrak{M}, \omega \vDash \mathrm{Does}_i^k\, \varphi & \textit{sii} & \|\varphi\|^{\mathfrak{M}} \in N_{i,k}^D(\omega)
\end{array}
$$

donde, $\|\varphi\|^{\mathfrak{M}} = \{\omega \in W : \mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi\}$.

Satisfacción para las fórmulas de $\mathcal{L}_{non}$

Para fórmulas que involucren operadores propios de $\mathcal{L}_{non}$, agregamos condiciones de satisfacción para las fórmulas no-modales, (inductivamente):

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{M},\omega \vDash \mathrm{Able}_i\ \varphi & \textit{sii} & \|\varphi\|^{\mathfrak{M}} \in N_i^A(\omega) \\
\mathfrak{M},\omega \vDash \mathrm{Does}_i\ \varphi & \textit{sii} & \|\varphi\|^{\mathfrak{M}} \in N_i^D(\omega) \\
\mathfrak{M},\omega \vDash \mathrm{Does}_i^k\ \varphi & \textit{sii} & \|\varphi\|^{\mathfrak{M}} \in N_{i,k}^D(\omega)
\end{array}$$

donde, $\|\varphi\|^{\mathfrak{M}} = \{\omega \in W : \mathfrak{M},\omega \vDash \varphi\}$.

Repasando la notación

$\mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi$	φ se satisface en el estado ω de $\mathfrak{M}$;
$\mathfrak{M} \vDash \varphi$	φ es *válida* en $\mathfrak{M}$, (se satisface en todos sus estados);
$\mathcal{C} \vDash \varphi$	φ es válida en la clase (de modelos) $\mathcal{C}$;
$\mathcal{M}$	simboliza la clase de todos los modelos de Kripke;
$\mathscr{M}$	simboliza la clase de todos los modelos tipo neighbourhood.

¿Qué características tienen los modelos para $\mathcal{L}_{norm}$? I

Los *sistemas axiomáticos* (que veremos pronto), impondrán en los modelos una determinada estructura, pues estos modelos deben validar los axiomas que los caracterizan. Hemos probado que los esquemas de axiomas,

(D_{Bel})	$\neg \mathrm{Bel}_i \perp$
(D_{O})	$\neg \mathrm{O} \perp$
($\mathsf{D}_{O'}$)	$\neg \mathrm{O}^i \perp$
(D_{Id})	$\neg \mathrm{I}^i \perp$
(D_{Int})	$\neg \mathrm{Int}_i \perp$
($\mathsf{D}_{Int'}$)	$\neg \mathrm{Int}_i^k \perp$

son válidos cuando las relaciones B_i, O, O^i, Id^i, I_i, I_i^k, son seriales.

¿Qué características tienen los modelos para $\mathcal{L}_{norm}$? II

Además los esquemas de axiomas,

$$(\mathbf{4}_{Bel}) \quad \mathrm{Bel}_i\, \varphi \rightarrow \mathrm{Bel}_i \mathrm{Bel}_i\, \varphi$$

$$(\mathbf{5}_{Bel}) \quad \neg \mathrm{Bel}_i\, \varphi \rightarrow \mathrm{Bel}_i \neg \mathrm{Bel}_i\, \varphi$$

son válidos cuando las relaciones B_i son transitivas y euclideanas.

Estos son los modelos en los que estaremos interesados,

$$\mathfrak{M} = \left\langle W, \{G_i\}_{i\in A}, \{B_i\}_{i\in A}, O, \left\{O^i\right\}_{i\in A}, \left\{Id^i\right\}_{i\in A}, \{I_i\}_{i\in A}, \left\{I_i^k\right\}_{i,k\in A}, V \right\rangle$$

aquellos donde las relaciones B_i, O, O^i, Id^i, I_i, I_i^k, son seriales y además las relaciones B_i son transitivas y euclideanas.

Simbolizamos a la clase de estos modelos, $\mathcal{M}^{LR}$.

¿Qué características tienen los modelos para $\mathcal{L}_{norm}$? II

Además los esquemas de axiomas,

$$(\mathbf{4}_{Bel}) \quad \mathrm{Bel}_i\, \varphi \rightarrow \mathrm{Bel}_i \mathrm{Bel}_i\, \varphi$$

$$(\mathbf{5}_{Bel}) \quad \neg \mathrm{Bel}_i\, \varphi \rightarrow \mathrm{Bel}_i \neg \mathrm{Bel}_i\, \varphi$$

son válidos cuando las relaciones B_i son transitivas y euclideanas.

Estos son los modelos en los que estaremos interesados,

$$\mathfrak{M} = \left\langle W, \{G_i\}_{i\in A}, \{B_i\}_{i\in A}, O, \left\{O^i\right\}_{i\in A}, \left\{Id^i\right\}_{i\in A}, \{I_i\}_{i\in A}, \left\{I_i^k\right\}_{i,k\in A}, V \right\rangle$$

aquellos donde las relaciones B_i, O, O^i, Id^i, I_i, I_i^k, son seriales y además las relaciones B_i son transitivas y euclideanas.

Simbolizamos a la clase de estos modelos, $\mathcal{M}^{LR}$.

¿Qué características tienen los modelos para $\mathcal{L}_{norm}$? II

Además los esquemas de axiomas,

$$(\mathbf{4}_{Bel}) \quad \mathrm{Bel}_i\,\varphi \to \mathrm{Bel}_i\mathrm{Bel}_i\,\varphi$$

$$(\mathbf{5}_{Bel}) \quad \neg\mathrm{Bel}_i\,\varphi \to \mathrm{Bel}_i\neg\mathrm{Bel}_i\,\varphi$$

son válidos cuando las relaciones B_i son transitivas y euclideanas.

Estos son los modelos en los que estaremos interesados,

$$\mathfrak{M} = \left\langle W, \{G_i\}_{i\in A}, \{B_i\}_{i\in A}, O, \left\{O^i\right\}_{i\in A}, \left\{Id^i\right\}_{i\in A}, \{I_i\}_{i\in A}, \left\{I_i^k\right\}_{i,k\in A}, V \right\rangle$$

aquellos donde las relaciones B_i, O, O^i, Id^i, I_i, I_i^k, son seriales y además las relaciones B_i son transitivas y euclideanas.

Simbolizamos a la clase de estos modelos, $\mathcal{M}^{LR}$.

¿Qué características tienen los modelos para $\mathcal{L}_{non}$? I

Necesitaremos que los modelos para $\mathcal{L}_{non}$ validen los esquemas:

$$(\mathsf{C}_{Does}) \quad (\mathrm{Does}_i\,\varphi \wedge \mathrm{Does}_i\,\psi) \to \mathrm{Does}_i\,(\varphi \wedge \psi)$$

Hemos probado que esto sucede cuando los mapeos N_i^D se encuentran cerrados bajo intersecciones: *si* $P \in N_i^D(\omega)$ *y* $Q \in N_i^D(\omega)$, *entonces* $P \cap Q \in N_i^D(\omega)$.

$$(\mathsf{T}_{Does}) \quad \mathrm{Does}_i\,\varphi \to \varphi$$

T_{Does} es válido en los modelos donde los mapeos N_i^D satisfacen que *si* $P \in N_i^D(\omega)$, *entonces* $\omega \in P$.

$$(\mathsf{NN}_{Does}) \quad \neg\mathrm{Does}_i\,\top$$

NN_{Does} es válido en los modelos donde para los mapeos N_i^D se tiene que *cualquiera sea* ω, $W \notin N_i^D(\omega)$.

¿Qué características tienen los modelos para $\mathcal{L}_{non}$? I

Necesitaremos que los modelos para $\mathcal{L}_{non}$ validen los esquemas:

$$(\mathbf{C}_{Does}) \quad (\mathrm{Does}_i\,\varphi \wedge \mathrm{Does}_i\,\psi) \rightarrow \mathrm{Does}_i\,(\varphi \wedge \psi)$$

Hemos probado que esto sucede cuando los mapeos N_i^D se encuentran cerrados bajo intersecciones: *si* $P \in N_i^D(\omega)$ *y* $Q \in N_i^D(\omega)$, *entonces* $P \cap Q \in N_i^D(\omega)$.

$$(\mathbf{T}_{Does}) \quad \mathrm{Does}_i\,\varphi \rightarrow \varphi$$

$\mathbf{T}_{Does}$ es válido en los modelos donde los mapeos N_i^D satisfacen que *si* $P \in N_i^D(\omega)$, *entonces* $\omega \in P$.

$$(\mathbf{NN}_{Does}) \quad \neg\mathrm{Does}_i\,\top$$

$\mathbf{NN}_{Does}$ es válido en los modelos donde para los mapeos N_i^D se tiene que *cualquiera sea* ω, $W \notin N_i^D(\omega)$.

¿Qué características tienen los modelos para $\mathcal{L}_{non}$? I

Necesitaremos que los modelos para $\mathcal{L}_{non}$ validen los esquemas:

$$(\mathbf{C}_{Does}) \quad (\mathrm{Does}_i\,\varphi \wedge \mathrm{Does}_i\,\psi) \to \mathrm{Does}_i\,(\varphi \wedge \psi)$$

Hemos probado que esto sucede cuando los mapeos N_i^D se encuentran cerrados bajo intersecciones: *si* $P \in N_i^D(\omega)$ *y* $Q \in N_i^D(\omega)$, *entonces* $P \cap Q \in N_i^D(\omega)$.

$$(\mathbf{T}_{Does}) \quad \mathrm{Does}_i\,\varphi \to \varphi$$

$\mathbf{T}_{Does}$ es válido en los modelos donde los mapeos N_i^D satisfacen que *si* $P \in N_i^D(\omega)$, *entonces* $\omega \in P$.

$$(\mathbf{NN}_{Does}) \quad \neg\mathrm{Does}_i\,\top$$

$\mathbf{NN}_{Does}$ es válido en los modelos donde para los mapeos N_i^D se tiene que *cualquiera sea* ω, $W \notin N_i^D(\omega)$.

¿Qué características tienen los modelos para $\mathcal{L}_{non}$? II

(**BR**) $\quad \mathrm{Does}_i\, \varphi \rightarrow \mathrm{Able}_i\, \varphi$

BR es válido en los modelos donde se cumple que cualquiera sea el estado ω, $N_i^D(\omega) \subseteq N_i^A(\omega)$.

Entonces nos interesan los modelos para $\mathcal{L}_{non}$,

$$\mathfrak{M} = \left\langle W, \{N_i^A\}_{i \in A}, \{N_i^D\}_{i \in A}, \{N_{i,k}^D\}_{i,k \in A}, V \right\rangle$$

donde se satisface (para cualquier ω),

- Los mapeos N_i^D se encuentran cerrados bajo intersecciones;
- *si* $P \in N_i^D(\omega)$, *entonces* $\omega \in P$;
- $W \notin N_i^D(\omega)$;
- $N_i^D(\omega) \subseteq N_i^A(\omega)$.

Simbolizamos a la clase de estos modelos, $\mathscr{M}^{LR}$.

¿Qué características tienen los modelos para $\mathcal{L}_{non}$? II

(**BR**) $\quad \mathrm{Does}_i\,\varphi \to \mathrm{Able}_i\,\varphi$

BR es válido en los modelos donde se cumple que cualquiera sea el estado ω, $N_i^D(\omega) \subseteq N_i^A(\omega)$.

Entonces nos interesan los modelos para $\mathcal{L}_{non}$,

$$\mathfrak{M} = \left\langle W, \{N_i^A\}_{i\in A}, \{N_i^D\}_{i\in A}, \{N_{i,k}^D\}_{i,k\in A}, V \right\rangle$$

donde se satisface (para cualquier ω),

- Los mapeos N_i^D se encuentran cerrados bajo intersecciones;
- *si* $P \in N_i^D(\omega)$, *entonces* $\omega \in P$;
- $W \notin N_i^D(\omega)$;
- $N_i^D(\omega) \subseteq N_i^A(\omega)$.

Simbolizamos a la clase de estos modelos, $\mathscr{M}^{LR}$.

¿Qué características tienen los modelos para $\mathcal{L}_{non}$? II

(**BR**) $\quad \mathrm{Does}_i\,\varphi \rightarrow \mathrm{Able}_i\,\varphi$

BR es válido en los modelos donde se cumple que cualquiera sea el estado ω, $N_i^D(\omega) \subseteq N_i^A(\omega)$.

Entonces nos interesan los modelos para $\mathcal{L}_{non}$,

$$\mathfrak{M} = \left\langle W, \{N_i^A\}_{i\in A}, \{N_i^D\}_{i\in A}, \{N_{i,k}^D\}_{i,k\in A}, V \right\rangle$$

donde se satisface (para cualquier ω),

- Los mapeos N_i^D se encuentran cerrados bajo intersecciones;
- *si* $P \in N_i^D(\omega)$, *entonces* $\omega \in P$;
- $W \notin N_i^D(\omega)$;
- $N_i^D(\omega) \subseteq N_i^A(\omega)$.

Simbolizamos a la clase de estos modelos, $\mathscr{M}^{LR}$.

Índice

Los *sistemas de lógica modal* que tratamos

En los enfoques modernos sobre *sistemas de lógica modal*, se los define en términos bastante abstractos: Un conjunto de fórmulas con determinadas condiciones de clausura. También se los define en base a algún *sistema de prueba* de preferencia. En nuestro caso los sistemas de prueba son *sistemas axiomáticos*: Una colección de *axiomas* que permiten iniciar el proceso deductivo y una colección de *reglas de deducción* que al aplicarse sucesivamente motorizan el proceso. A este proceso lo conocemos como *derivación* (▸ expl.).

Cuando φ se obtiene mediante una derivación en el sistema Σ, se escribe $\Sigma \vdash \varphi$, y se dice, φ es *derivable* en Σ, φ es un *teorema* de Σ. (Recordemos que el sistema Σ es un conjunto de fórmulas, entonces: $\Sigma \vdash \varphi$ *sii* $\varphi \in \Sigma$).

El sistema de lógica modal $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$

Este sistema caracterizará las fórmulas válidas de los modelos en la clase $\mathcal{M}$. Se encuentra basado en el difundido sistema de lógica modal **K** y se compone de los siguientes esquemas de axiomas:

(**PL**) Todas las instancias de tautologías del cálculo proposicional

($\mathbf{K}_{Goal}$) $\mathrm{Goal}_i(\varphi \to \psi) \to (\mathrm{Goal}_i\,\varphi \to \mathrm{Goal}_i\,\psi)$

+ ($\mathbf{K}_{Bel}$) + ($\mathbf{K}_{O}$) + ($\mathbf{K}_{O'}$) + ($\mathbf{K}_{Id}$) + ($\mathbf{K}_{Int}$) + ($\mathbf{K}_{Int'}$)

... y reglas de deducción:

(**MP**) *De* φ *y* $\varphi \to \psi$, *se deduce* ψ

($\mathbf{Gen}_{Goal}$) *De* φ, *se deduce* $\mathrm{Goal}_i\,\varphi$

+ ($\mathbf{Gen}_{Bel}$) + ($\mathbf{Gen}_{O}$) + ($\mathbf{Gen}_{O'}$) + ($\mathbf{Gen}_{Id}$) + ($\mathbf{Gen}_{Int}$) + ($\mathbf{Gen}_{Int'}$)

El sistema de lógica modal $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$

Este sistema caracterizará las fórmulas válidas de los modelos en la clase $\mathcal{M}$. Se encuentra basado en el difundido sistema de lógica modal **K** y se compone de los siguientes esquemas de axiomas:

(**PL**)	Todas las instancias de tautologías del cálculo proposicional
($\mathbf{K}_{Goal}$)	$\mathrm{Goal}_i (\varphi \to \psi) \to (\mathrm{Goal}_i \varphi \to \mathrm{Goal}_i \psi)$

$+ (\mathbf{K}_{Bel}) + (\mathbf{K}_{O}) + (\mathbf{K}_{O'}) + (\mathbf{K}_{Id}) + (\mathbf{K}_{Int}) + (\mathbf{K}_{Int'})$

... y reglas de deducción:

(**MP**)	*De* φ *y* $\varphi \to \psi$, *se deduce* ψ
($\mathbf{Gen}_{Goal}$)	*De* φ, *se deduce* $\mathrm{Goal}_i\, \varphi$

$+ (\mathbf{Gen}_{Bel}) + (\mathbf{Gen}_{O}) + (\mathbf{Gen}_{O'}) + (\mathbf{Gen}_{Id}) + (\mathbf{Gen}_{Int}) + (\mathbf{Gen}_{Int'})$

El sistema de lógica modal $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$

Este sistema caracterizará las fórmulas válidas de los modelos en la clase $\mathcal{M}$. Se encuentra basado en el difundido sistema de lógica modal **K** y se compone de los siguientes esquemas de axiomas:

(**PL**) Todas las instancias de tautologías del cálculo proposicional

($\mathbf{K}_{Goal}$) $\mathrm{Goal}_i(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\mathrm{Goal}_i\,\varphi \rightarrow \mathrm{Goal}_i\,\psi)$

+ ($\mathbf{K}_{Bel}$) + ($\mathbf{K}_{O}$) + ($\mathbf{K}_{O'}$) + ($\mathbf{K}_{Id}$) + ($\mathbf{K}_{Int}$) + ($\mathbf{K}_{Int'}$)

... y reglas de deducción:

(**MP**) *De* φ *y* $\varphi \rightarrow \psi$, *se deduce* ψ

($\mathbf{Gen}_{Goal}$) *De* φ, *se deduce* $\mathrm{Goal}_i\,\varphi$

+ ($\mathbf{Gen}_{Bel}$) + ($\mathbf{Gen}_{O}$) + ($\mathbf{Gen}_{O'}$) + ($\mathbf{Gen}_{Id}$) + ($\mathbf{Gen}_{Int}$) + ($\mathbf{Gen}_{Int'}$)

El sistema de lógica modal $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$

Este sistema es una *extensión* (▸ expl.) de $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$, es decir que $PL \subset \mathsf{K}\mathcal{L}_{norm} \subset \mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$. Se compone entonces de los esquemas de axiomas y reglas de deducción de $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$ e incorpora:

$(\mathbf{D}_{Bel})$	$\neg \mathrm{Bel}_i \perp$	$(\mathbf{4}_{Bel})$	$\mathrm{Bel}_i\, \varphi \to \mathrm{Bel}_i \mathrm{Bel}_i\, \varphi$
$(\mathbf{D}_{O})$	$\neg \mathrm{O} \perp$	$(\mathbf{5}_{Bel})$	$\neg \mathrm{Bel}_i\, \varphi \to \mathrm{Bel}_i \neg \mathrm{Bel}_i\, \varphi$
$(\mathbf{D}_{O'})$	$\neg \mathrm{O}^i \perp$		
$(\mathbf{D}_{Id})$	$\neg \mathrm{I}^i \perp$		
$(\mathbf{D}_{Int})$	$\neg \mathrm{Int}_i \perp$		
$(\mathbf{D}_{Int'})$	$\neg \mathrm{Int}_i^k \perp$		

$\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ caracterizará las fórmulas válidas de los modelos en $\mathcal{M}^{LR}$.

El sistema de lógica modal $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$

Este sistema se basa en los sistemas difundidos en la literatura como sistemas *clásicos* de lógica modal. Se compone de los siguientes esquemas de axiomas:

(**PL**) Todas las instancias de tautologías del cálculo proposicional

...y reglas de deducción:

(**MP**) *De* φ *y* $\varphi \rightarrow \psi$, *se deduce* ψ

(**RE**$_{Able}$) *De* $\varphi \leftrightarrow \psi$, *se deduce* $\mathrm{Able}_i\, \varphi \leftrightarrow \mathrm{Able}_i\, \psi$

(**RE**$_{Does}$) *De* $\varphi \leftrightarrow \psi$, *se deduce* $\mathrm{Does}_i\, \varphi \leftrightarrow \mathrm{Does}_i\, \psi$

(**RE**$_{Does'}$) *De* $\varphi \leftrightarrow \psi$, *se deduce* $\mathrm{Does}_i^k\, \varphi \leftrightarrow \mathrm{Does}_i^k\, \psi$

$\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ caracterizará las fórmulas que validan los modelos en $\mathscr{M}$.

El sistema de lógica modal $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$

Aquí tenemos otra extensión: $PL \subset \mathbf{C}\mathcal{L}_{non} \subset \mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$. Este sistema se compone de los esquemas de axiomas y reglas de deducción de $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ e incorpora los esquemas que son de nuestro interés:

$(\mathbf{C}_{Does})$	$(\mathrm{Does}_i\, \varphi \wedge \mathrm{Does}_i\, \psi) \rightarrow \mathrm{Does}_i\, (\varphi \wedge \psi)$
$(\mathbf{C}_{Does'})$	$(\mathrm{Does}_i^k\, \varphi \wedge \mathrm{Does}_i^k\, \psi) \rightarrow \mathrm{Does}_i^k (\varphi \wedge \psi)$
$(\mathbf{T}_{Does})$	$\mathrm{Does}_i\, \varphi \rightarrow \varphi$
$(\mathbf{T}_{Does'})$	$\mathrm{Does}_i^k\, \varphi \rightarrow \varphi$
$(\mathbf{NN}_{Does})$	$\neg \mathrm{Does}_i \top$
$(\mathbf{NN}_{Does'})$	$\neg \mathrm{Does}_i^k \top$
$(\mathbf{BR})$	$\mathrm{Does}_i\, \varphi \rightarrow \mathrm{Able}_i\, \varphi$

$\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$ caracterizará las fórmulas que validan los modelos en $\mathscr{M}^{LR}$.

El sistema de lógica modal $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$

Aquí tenemos otra extensión: $PL \subset \mathbf{C}\mathcal{L}_{non} \subset \mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$. Este sistema se compone de los esquemas de axiomas y reglas de deducción de $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ e incorpora los esquemas que son de nuestro interés:

$(\mathbf{C}_{Does})$	$(\mathrm{Does}_i\,\varphi \wedge \mathrm{Does}_i\,\psi) \to \mathrm{Does}_i\,(\varphi \wedge \psi)$
$(\mathbf{C}_{Does'})$	$(\mathrm{Does}_i^k\,\varphi \wedge \mathrm{Does}_i^k\,\psi) \to \mathrm{Does}_i^k(\varphi \wedge \psi)$
$(\mathbf{T}_{Does})$	$\mathrm{Does}_i\,\varphi \to \varphi$
$(\mathbf{T}_{Does'})$	$\mathrm{Does}_i^k\,\varphi \to \varphi$
$(\mathbf{NN}_{Does})$	$\neg\mathrm{Does}_i\,\top$
$(\mathbf{NN}_{Does'})$	$\neg\mathrm{Does}_i^k\,\top$
$(\mathbf{BR})$	$\mathrm{Does}_i\,\varphi \to \mathrm{Able}_i\,\varphi$

$\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$ caracterizará las fórmulas que validan los modelos en $\mathscr{M}^{LR}$.

Índice

¿Qué entendemos por Completitud?

Se dice que (el sist. de lóg. modal) Σ es *completo* con respecto a la clase $\mathcal{C}$, cuando cada fórmula válida en $\mathcal{C}$ es derivable (es un teorema) de Σ:

Si $\mathcal{C} \models \varphi$, *entonces* $\Sigma \vdash \varphi$.

El recíproco de este enunciado, se conoce como la propiedad de *soundness*, que es más simple de demostrar y por consiguiente solo hemos esquematizado y referenciado su demostración.

Cuando ambas propiedades se satisfacen para algún sistema con respecto a alguna clase de modelos, se dice que el sistema está *determinado* por esa clase.

¿Por qué nos interesa?

¿Qué entendemos por Completitud?

Se dice que (el sist. de lóg. modal) Σ es *completo* con respecto a la clase $\mathcal{C}$, cuando cada fórmula válida en $\mathcal{C}$ es derivable (es un teorema) de Σ:

Si $\mathcal{C} \vDash \varphi$, *entonces* $\Sigma \vdash \varphi$.

El recíproco de este enunciado, se conoce como la propiedad de *soundness*, que es más simple de demostrar y por consiguiente solo hemos esquematizado y referenciado su demostración.

Cuando ambas propiedades se satisfacen para algún sistema con respecto a alguna clase de modelos, se dice que el sistema está *determinado* por esa clase.

¿Por qué nos interesa?

Índice

Consistencia, definiciones

- La fórmula φ es Σ-*consistente* cuando $\Sigma \nvdash \neg\varphi$.
- El conjunto finito de fórmulas $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_j\}$ es consistente si la conjunción $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_j$ es consistente.
- Un conjunto infinito de fórmulas es consistente cuando todos los subconjuntos finitos de éste son consistentes.
- Un conjunto de fórmulas Γ es *maximal* Σ-*consistente* (Σ-CMC), si Γ es Σ-consistente y para cualquier fórmula ψ, si $\psi \notin \Gamma$, entonces $\Gamma \cup \{\psi\}$ es Σ-*inconsistente* (no es Σ-consistente).
  (Intuitivamente, estos conjuntos contienen tantas fórmulas como sea posible sin devenir inconsistentes).

Propiedades de los *conjuntos maximales consistentes*

Algunas fundamentales. Sea Σ un sistema de lógica modal, Γ un Σ-CMC, φ y ψ fórmulas arbitrarias:

- *O* $\varphi \in \Gamma$, *o* $\neg\varphi \in \Gamma$, *(pero no ambas)*;
- $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ *sii* $\varphi \in \Gamma$ *y* $\psi \in \Gamma$;
- *Cuando* $\varphi \in \Gamma$ *y* $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ *se da* $\psi \in \Gamma$;
- *Si* $\Sigma \vdash \varphi$ *entonces* $\varphi \in \Gamma$.

Finalmente, sabemos que para cualquier conjunto Δ Σ-consistente, podemos obtener una extensión maximal de Δ (un Δ Σ-CMC). (*Lema de Lindenbaum*).

Propiedades de los *conjuntos maximales consistentes*

Algunas fundamentales. Sea Σ un sistema de lógica modal, Γ un Σ-CMC, φ y ψ fórmulas arbitrarias:

- *O* $\varphi \in \Gamma$, *o* $\neg\varphi \in \Gamma$, *(pero no ambas)*;
- $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ *sii* $\varphi \in \Gamma$ *y* $\psi \in \Gamma$;
- *Cuando* $\varphi \in \Gamma$ *y* $\varphi \to \psi \in \Gamma$ *se da* $\psi \in \Gamma$;
- *Si* $\Sigma \vdash \varphi$ *entonces* $\varphi \in \Gamma$.

Finalmente, sabemos que para cualquier conjunto Δ Σ-consistente, podemos obtener una extensión maximal de Δ (un Δ Σ-CMC). (*Lema de Lindenbaum*).

Propiedades de los *conjuntos maximales consistentes*

Algunas fundamentales. Sea Σ un sistema de lógica modal, Γ un Σ-CMC, φ y ψ fórmulas arbitrarias:

- *O* $\varphi \in \Gamma$, *o* $\neg\varphi \in \Gamma$, *(pero no ambas)*;
- $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ *sii* $\varphi \in \Gamma$ *y* $\psi \in \Gamma$;
- *Cuando* $\varphi \in \Gamma$ *y* $\varphi \to \psi \in \Gamma$ *se da* $\psi \in \Gamma$;
- *Si* $\Sigma \vdash \varphi$ *entonces* $\varphi \in \Gamma$.

Finalmente, sabemos que para cualquier conjunto Δ Σ-consistente, podemos obtener una extensión maximal de Δ (un Δ Σ-CMC). (*Lema de Lindenbaum*).

Propiedades de los *conjuntos maximales consistentes*

Algunas fundamentales. Sea Σ un sistema de lógica modal, Γ un Σ-CMC, φ y ψ fórmulas arbitrarias:

- *O* $\varphi \in \Gamma$, *o* $\neg\varphi \in \Gamma$, *(pero no ambas)*;
- $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ *sii* $\varphi \in \Gamma$ *y* $\psi \in \Gamma$;
- *Cuando* $\varphi \in \Gamma$ *y* $\varphi \to \psi \in \Gamma$ *se da* $\psi \in \Gamma$;
- *Si* $\Sigma \vdash \varphi$ *entonces* $\varphi \in \Gamma$.

Finalmente, sabemos que para cualquier conjunto Δ Σ-consistente, podemos obtener una extensión maximal de Δ (un Δ Σ-CMC). (*Lema de Lindenbaum*).

Propiedades de los *conjuntos maximales consistentes*

Algunas fundamentales. Sea Σ un sistema de lógica modal, Γ un Σ-CMC, φ y ψ fórmulas arbitrarias:

- *O* $\varphi \in \Gamma$, *o* $\neg\varphi \in \Gamma$, *(pero no ambas)*;
- $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ *sii* $\varphi \in \Gamma$ *y* $\psi \in \Gamma$;
- *Cuando* $\varphi \in \Gamma$ *y* $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ *se da* $\psi \in \Gamma$;
- *Si* $\Sigma \vdash \varphi$ *entonces* $\varphi \in \Gamma$.

Finalmente, sabemos que para cualquier conjunto Δ Σ-consistente, podemos obtener una extensión maximal de Δ (un Δ Σ-CMC). (*Lema de Lindenbaum*).

¿Cómo interpretamos una prueba de completitud? I

Recordemos entonces que debemos probar: para cada fórmula φ,

Si $\mathcal{C} \models \varphi$, *entonces* $\Sigma \vdash \varphi$;
siendo $\mathcal{C}$ una clase particular de modelos y Σ un sist. de lóg. modal.

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces* $\mathcal{C} \nvDash \varphi$,

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) en el cual* $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$,

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \nvDash \varphi$,

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \models \neg\varphi$,

¿Cómo interpretamos una prueba de completitud? I

Recordemos entonces que debemos probar: para cada fórmula φ,

Si $\mathcal{C} \models \varphi$, *entonces* $\Sigma \vdash \varphi$;
siendo $\mathcal{C}$ una clase particular de modelos y Σ un sist. de lóg. modal.

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces* $\mathcal{C} \nvDash \varphi$,

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) en el cual* $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$,

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \nvDash \varphi$,

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \models \neg\varphi$,

¿Cómo interpretamos una prueba de completitud? I

Recordemos entonces que debemos probar: para cada fórmula φ,

Si $\mathcal{C} \vDash \varphi$, *entonces* $\Sigma \vdash \varphi$;
siendo $\mathcal{C}$ una clase particular de modelos y Σ un sist. de lóg. modal.

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces* $\mathcal{C} \nvDash \varphi$,

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) en el cual* $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$,

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \nvDash \varphi$,

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \vDash \neg\varphi$,

¿Cómo interpretamos una prueba de completitud? I

Recordemos entonces que debemos probar: para cada fórmula φ,

Si $\mathcal{C} \vDash \varphi$, *entonces* $\Sigma \vdash \varphi$;
siendo $\mathcal{C}$ una clase particular de modelos y Σ un sist. de lóg. modal.

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces* $\mathcal{C} \nvDash \varphi$,

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) en el cual* $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$,

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \nvDash \varphi$,

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \vDash \neg\varphi$,

¿Cómo interpretamos una prueba de completitud? I

Recordemos entonces que debemos probar: para cada fórmula φ,

Si $\mathcal{C} \vDash \varphi$, *entonces* $\Sigma \vdash \varphi$;
siendo $\mathcal{C}$ una clase particular de modelos y Σ un sist. de lóg. modal.

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces* $\mathcal{C} \nvDash \varphi$,

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) en el cual* $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$,

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \nvDash \varphi$,

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \vDash \neg\varphi$,

¿Cómo interpretamos una prueba de completitud? II

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \vDash \neg\varphi$*,*

Si $\Sigma \nvdash \neg\varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi$*.*

Finalmente estamos diciendo que una prueba de completitud (con respecto a una clase $\mathcal{C}$) implica demostrar que toda fórmula Σ-consistente es satisfactible (en algún modelo de la clase $\mathcal{C}$).

¿Cómo interpretamos una prueba de completitud? II

Si $\Sigma \nvDash \varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \vDash \neg\varphi$*,*

Si $\Sigma \nvDash \neg\varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi$*.*

Finalmente estamos diciendo que una prueba de completitud (con respecto a una clase $\mathcal{C}$) implica demostrar que toda fórmula Σ-consistente es satisfactible (en algún modelo de la clase $\mathcal{C}$).

Índice

Introducción al modelo canónico I

Estos modelos (para el sistema Σ) tienen la siguiente forma,

$$\mathfrak{M}^c = (W^c, \ldots, V^c)$$

donde,

W^c	es el conjunto de estados $\{\Gamma : \Gamma \text{ *es un* } \Sigma\text{-CMC}\}$,
V^c	es la valuación definida por, $V^c(p_i) = \{\omega \in W^c : p_i \in \omega\}$

- Cada estado es un Σ-CMC y, cada uno de estos conjuntos es un estado.
- Para cada uno de ellos tendremos que:

def. satisf. $\mathfrak{M}, \omega \models p_i$ *sii* $\omega \in V^c(p_i)$ *sii* $p_i \in \omega$.

Introducción al modelo canónico I

Estos modelos (para el sistema Σ) tienen la siguiente forma,

$$\mathfrak{M}^c = (W^c, \ldots, V^c)$$

donde,

W^c es el conjunto de estados $\{\Gamma : \Gamma \textit{ es un } \Sigma\text{-CMC}\}$,

V^c es la valuación definida por, $V^c(p_i) = \{\omega \in W^c : p_i \in \omega\}$

- Cada estado es un Σ-CMC y, cada uno de estos conjuntos es un estado.
- Para cada uno de ellos tendremos que:

▸ def. satisf.

$$\mathfrak{M}, \omega \models p_i \ \textit{ sii } \ \omega \in V^c(p_i) \ \textit{ sii } \ p_i \in \omega.$$

Introducción al modelo canónico II

$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash p_i$ *sii* $\omega \in V^c(p_i)$ *sii* $p_i \in \omega$.

¿Qué pasaría si esta equivalencia se sostuviera para cualquier fórmula φ?

$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \varphi$ *sii* $\varphi \in \omega$. *sii* φ *es* Σ*-consistente.* (*Lema de verdad*)

En cada estado (CMC) solo serían satisfactibles aquellas fórmulas que éste contiene. Por consiguiente dado que cualquier fórmula consistente se encuentra en algún CMC (estado) de $\mathfrak{M}^c$, ésta sería satisfactible en este modelo.

Si $\Sigma \nvdash \neg\varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi$.

¿En qué clase de modelos se encuentra $\mathfrak{M}^c$? def. modelo

Introducción al modelo canónico II

$\mathfrak{M}^c, \omega \models p_i$ *sii* $\omega \in V^c(p_i)$ *sii* $p_i \in \omega$.

¿Qué pasaría si esta equivalencia se sostuviera para cualquier fórmula φ?

$\mathfrak{M}^c, \omega \models \varphi$ *sii* $\varphi \in \omega$. *sii* φ *es* Σ*-consistente.* (*Lema de verdad*)

En cada estado (CMC) solo serían satisfactibles aquellas fórmulas que éste contiene. Por consiguiente dado que cualquier fórmula consistente se encuentra en algún CMC (estado) de $\mathfrak{M}^c$, ésta sería satisfactible en este modelo.

Si $\Sigma \nvdash \neg\varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \models \varphi$.

¿En qué clase de modelos se encuentra $\mathfrak{M}^c$? def. modelo

Introducción al modelo canónico II

$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash p_i$ *sii* $\omega \in V^c(p_i)$ *sii* $p_i \in \omega$.

¿Qué pasaría si esta equivalencia se sostuviera para cualquier fórmula φ?

$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \varphi$ *sii* $\varphi \in \omega$. *sii* φ *es* Σ*-consistente.* (*Lema de verdad*)

En cada estado (CMC) solo serían satisfactibles aquellas fórmulas que éste contiene. Por consiguiente dado que cualquier fórmula consistente se encuentra en algún CMC (estado) de $\mathfrak{M}^c$, ésta sería satisfactible en este modelo.

Si $\Sigma \nvdash \neg\varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi$.

¿En qué clase de modelos se encuentra $\mathfrak{M}^c$? def. modelo

Introducción al modelo canónico II

$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash p_i$ *sii* $\omega \in V^c(p_i)$ *sii* $p_i \in \omega$.

¿Qué pasaría si esta equivalencia se sostuviera para cualquier fórmula φ?

$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \varphi$ *sii* $\varphi \in \omega$. *sii* φ *es* Σ*-consistente*. (*Lema de verdad*)

En cada estado (CMC) solo serían satisfactibles aquellas fórmulas que éste contiene. Por consiguiente dado que cualquier fórmula consistente se encuentra en algún CMC (estado) de $\mathfrak{M}^c$, ésta sería satisfactible en este modelo.

Si $\Sigma \nvdash \neg\varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi$.

¿En qué clase de modelos se encuentra $\mathfrak{M}^c$? def. modelo

Introducción al modelo canónico II

$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash p_i$ *sii* $\omega \in V^c(p_i)$ *sii* $p_i \in \omega$.

¿Qué pasaría si esta equivalencia se sostuviera para cualquier fórmula φ?

$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \varphi$ *sii* $\varphi \in \omega$. *sii* φ *es* Σ*-consistente.* (*Lema de verdad*)

En cada estado (CMC) solo serían satisfactibles aquellas fórmulas que éste contiene. Por consiguiente dado que cualquier fórmula consistente se encuentra en algún CMC (estado) de $\mathfrak{M}^c$, ésta sería satisfactible en este modelo.

Si $\Sigma \nvdash \neg\varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi$.

¿En qué clase de modelos se encuentra $\mathfrak{M}^c$? def. modelo

Introducción al modelo canónico II

$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash p_i$ *sii* $\omega \in V^c(p_i)$ *sii* $p_i \in \omega$.

¿Qué pasaría si esta equivalencia se sostuviera para cualquier fórmula φ?

$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \varphi$ *sii* $\varphi \in \omega$. *sii* φ *es* Σ*-consistente.* (*Lema de verdad*)

En cada estado (CMC) solo serían satisfactibles aquellas fórmulas que éste contiene. Por consiguiente dado que cualquier fórmula consistente se encuentra en algún CMC (estado) de $\mathfrak{M}^c$, ésta sería satisfactible en este modelo.

Si $\Sigma \nvdash \neg\varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi$.

¿En qué clase de modelos se encuentra $\mathfrak{M}^c$? def. modelo

Introducción al modelo canónico II

$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash p_i$ *sii* $\omega \in V^c(p_i)$ *sii* $p_i \in \omega$.

¿Qué pasaría si esta equivalencia se sostuviera para cualquier fórmula φ?

$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \varphi$ *sii* $\varphi \in \omega$. *sii* φ *es* Σ*-consistente.* (*Lema de verdad*)

En cada estado (CMC) solo serían satisfactibles aquellas fórmulas que éste contiene. Por consiguiente dado que cualquier fórmula consistente se encuentra en algún CMC (estado) de $\mathfrak{M}^c$, ésta sería satisfactible en este modelo.

Si $\Sigma \nvDash \neg\varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi$.

¿En qué clase de modelos se encuentra $\mathfrak{M}^c$? def. modelo

El *lema de verdad* para las fórmulas no-modales

$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \varphi$ *sii* $\varphi \in \omega$.

El *lema de verdad* se satisface para fórmulas no-modales. Esto se prueba por inducción (estructural) sobre φ.
Se obtiene que para las distintas formas que puede tomar φ,

Cuando φ es de la forma p_i:	$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash p_i$	*sii*	$p_i \in \omega$.
Cuando φ es de la forma $\neg\psi$:	$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \neg\psi$	*sii*	$\neg\psi \in \omega$.
Cuando φ es de la forma $\phi \wedge \psi$:	$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \phi \wedge \psi$	*sii*	$\phi \wedge \psi \in \omega$.

¿Qué sucede para las fórmulas modales?
Esta pregunta nos lleva a especificar el modelo canónico para los sistemas de lógica modal que hemos visto previamente, $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ y $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$.

El *lema de verdad* para las fórmulas no-modales

$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \varphi$ *sii* $\varphi \in \omega$.

El *lema de verdad* se satisface para fórmulas no-modales. Esto se prueba por inducción (estructural) sobre φ.
Se obtiene que para las distintas formas que puede tomar φ,

Cuando φ es de la forma p_i:	$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash p_i$	*sii*	$p_i \in \omega$.
Cuando φ es de la forma $\neg\psi$:	$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \neg\psi$	*sii*	$\neg\psi \in \omega$.
Cuando φ es de la forma $\phi \wedge \psi$:	$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \phi \wedge \psi$	*sii*	$\phi \wedge \psi \in \omega$.

¿Qué sucede para las fórmulas modales?
Esta pregunta nos lleva a especificar el modelo canónico para los sistemas de lógica modal que hemos visto previamente, $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ y $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$.

Índice

El modelo canónico para $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$

Este modelo canónico tiene la siguiente forma:

$$\mathfrak{M}^c = \left\langle W^c, \{\breve{G}_i\}_{i\in A}, \{\breve{B}_i\}_{i\in A}, \breve{O}, \ldots, \{\breve{I}_i^k\}_{i,k\in A}, V^c \right\rangle$$

donde,

W^c es el conjunto de estados $\{\Gamma : \Gamma$ *es un* $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$-CMC$\}$,

V^c es la valuación canónica que definimos anteriormente,

$\breve{G}_i = \left\{(\omega, \upsilon) : \omega^{-\mathrm{Goal}} \subseteq \upsilon\right\}$ donde $\omega^{-\mathrm{Goal}} = \{\varphi : \mathrm{Goal}_i\,\varphi \in \omega\}$,

$\breve{B}_i = \left\{(\omega, \upsilon) : \omega^{-\mathrm{Bel}} \subseteq \upsilon\right\}$ donde $\omega^{-\mathrm{Bel}} = \{\varphi : \mathrm{Bel}_i\,\varphi \in \omega\}$,

$$\vdots$$

Esta notación es equivalente a: *Para cualquier* ω *y* υ *en* W^c:
$\omega\breve{G}_i\upsilon$ *sii* $(\forall\varphi)($*si* $\mathrm{Goal}_i\,\varphi \in \omega$ *entonces* $\varphi \in \upsilon)\ldots$ satisf. Kripke

El modelo canónico para $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$

Este modelo canónico tiene la siguiente forma:

$$\mathfrak{M}^c = \left\langle W^c, \{\breve{G}_i\}_{i\in A}, \{\breve{B}_i\}_{i\in A}, \breve{O}, \ldots, \{\breve{I}_i^k\}_{i,k\in A}, V^c \right\rangle$$

donde,

W^c es el conjunto de estados $\{\Gamma : \Gamma$ *es un* $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$-CMC$\}$,

V^c es la valuación canónica que definimos anteriormente,

$$\breve{G}_i = \left\{(\omega, \upsilon) : \omega^{-\mathrm{Goal}} \subseteq \upsilon\right\} \quad \text{donde} \quad \omega^{-\mathrm{Goal}} = \{\varphi : \mathrm{Goal}_i\,\varphi \in \omega\},$$

$$\breve{B}_i = \left\{(\omega, \upsilon) : \omega^{-\mathrm{Bel}} \subseteq \upsilon\right\} \quad \text{donde} \quad \omega^{-\mathrm{Bel}} = \{\varphi : \mathrm{Bel}_i\,\varphi \in \omega\},$$

$$\vdots$$

Esta notación es equivalente a: *Para cualquier* ω *y* υ *en* W^c:
$\omega\breve{G}_i\upsilon$ *sii* $(\forall\varphi)($*si* $\mathrm{Goal}_i\,\varphi \in \omega$ *entonces* $\varphi \in \upsilon)\ldots$ satisf. Kripke

El *lema de verdad* para las fórmulas modales de $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$

Nuevamente el *lema de verdad* se prueba por inducción en la estructura de $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$. Cuando φ es una fórmula no-modal ya sabemos que el lema se cumple.
Luego se prueba que cuando φ tiene la forma $\mathrm{Goal}_i\,\psi$ se obtiene $\mathfrak{M}^c, \omega \models \mathrm{Goal}_i\,\psi$ *sii* $\mathrm{Goal}_i\,\psi \in \omega$; cuando tiene la forma $\mathrm{Bel}_i\,\psi$, se obtiene $\mathfrak{M}^c, \omega \models \mathrm{Bel}_i\,\psi$ *sii* $\mathrm{Bel}_i\,\psi \in \omega$; y así para el resto de las formas que puede tomar $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$.

Tenemos entonces, *para toda* $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$,
$\mathfrak{M}^c, \omega \models \varphi$ *sii* $\varphi \in \omega$. *sii* φ *es* $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$*-consistente.*

Si $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm} \nvdash \neg\varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}\,(=\mathfrak{M}^c)$ (*¿en* $\mathcal{M}$*?*) *y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \models \varphi$.

$\mathfrak{M}^c$ está en $\mathcal{M}$, en consecuencia $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ es completo con respecto a $\mathcal{M}$.

El *lema de verdad* para las fórmulas modales de $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$

Nuevamente el *lema de verdad* se prueba por inducción en la estructura de $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$. Cuando φ es una fórmula no-modal ya sabemos que el lema se cumple.

Luego se prueba que cuando φ tiene la forma $\mathrm{Goal}_i\,\psi$ se obtiene $\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \mathrm{Goal}_i\,\psi$ *sii* $\mathrm{Goal}_i\,\psi \in \omega$; cuando tiene la forma $\mathrm{Bel}_i\,\psi$, se obtiene $\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \mathrm{Bel}_i\,\psi$ *sii* $\mathrm{Bel}_i\,\psi \in \omega$; y así para el resto de las formas que puede tomar $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$.

Tenemos entonces, *para toda* $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$,
$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \varphi$ *sii* $\varphi \in \omega$. *sii* φ *es* $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$*-consistente.*

Si $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm} \nvdash \neg\varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}\,(=\mathfrak{M}^c)$ *(¿en* $\mathcal{M}$*?) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi$.

$\mathfrak{M}^c$ está en $\mathcal{M}$, en consecuencia $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$ es completo con respecto a $\mathcal{M}$.

El *lema de verdad* para las fórmulas modales de $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$

Nuevamente el *lema de verdad* se prueba por inducción en la estructura de $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$. Cuando φ es una fórmula no-modal ya sabemos que el lema se cumple.
Luego se prueba que cuando φ tiene la forma $\mathrm{Goal}_i\,\psi$ se obtiene $\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \mathrm{Goal}_i\,\psi$ *sii* $\mathrm{Goal}_i\,\psi \in \omega$; cuando tiene la forma $\mathrm{Bel}_i\,\psi$, se obtiene $\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \mathrm{Bel}_i\,\psi$ *sii* $\mathrm{Bel}_i\,\psi \in \omega$; y así para el resto de las formas que puede tomar $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$.

Tenemos entonces, *para toda* $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$,
$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \varphi$ *sii* $\varphi \in \omega$. *sii* φ *es* $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$*-consistente.*

Si $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm} \nvdash \neg\varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}(=\mathfrak{M}^c)$ *(¿en* $\mathcal{M}$*?) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi$.

$\mathfrak{M}^c$ está en $\mathcal{M}$, en consecuencia $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$ es completo con respecto a $\mathcal{M}$.

El *lema de verdad* para las fórmulas modales de $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$

Nuevamente el *lema de verdad* se prueba por inducción en la estructura de $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$. Cuando φ es una fórmula no-modal ya sabemos que el lema se cumple.

Luego se prueba que cuando φ tiene la forma $\mathrm{Goal}_i\,\psi$ se obtiene $\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \mathrm{Goal}_i\,\psi$ *sii* $\mathrm{Goal}_i\,\psi \in \omega$; cuando tiene la forma $\mathrm{Bel}_i\,\psi$, se obtiene $\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \mathrm{Bel}_i\,\psi$ *sii* $\mathrm{Bel}_i\,\psi \in \omega$; y así para el resto de las formas que puede tomar $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$.

Tenemos entonces, *para toda* $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$,
$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \varphi$ *sii* $\varphi \in \omega$. *sii* φ *es* $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$*-consistente.*

Si $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm} \nvDash \neg\varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}\,(=\mathfrak{M}^c)$ *(¿en* $\mathcal{M}$*?) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi$.

$\mathfrak{M}^c$ está en $\mathcal{M}$, en consecuencia $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$ es completo con respecto a $\mathcal{M}$.

El *lema de verdad* para las fórmulas modales de $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$

Nuevamente el *lema de verdad* se prueba por inducción en la estructura de $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$. Cuando φ es una fórmula no-modal ya sabemos que el lema se cumple.
Luego se prueba que cuando φ tiene la forma $\mathrm{Goal}_i\,\psi$ se obtiene $\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \mathrm{Goal}_i\,\psi$ *sii* $\mathrm{Goal}_i\,\psi \in \omega$; cuando tiene la forma $\mathrm{Bel}_i\,\psi$, se obtiene $\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \mathrm{Bel}_i\,\psi$ *sii* $\mathrm{Bel}_i\,\psi \in \omega$; y así para el resto de las formas que puede tomar $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$.

Tenemos entonces, *para toda* $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$,
$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \varphi$ *sii* $\varphi \in \omega$ *sii* φ *es* $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$*-consistente.*

Si $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm} \nvdash \neg\varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}\,(=\mathfrak{M}^c)$ *(¿en* $\mathcal{M}$*?) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi$.

$\mathfrak{M}^c$ está en $\mathcal{M}$, en consecuencia $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$ es completo con respecto a $\mathcal{M}$.

¿Qué sucede con el sistema $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$?

Un corolario inmediato del resultado anterior es:

$$\mathfrak{M}^c \models \varphi \quad \textit{sii} \quad \mathsf{K}\mathcal{L}_{norm} \vdash \varphi$$

Este resultado nos permite razonar lo siguiente: Si el modelo canónico para un sistema Σ se encuentra contenido en una clase de modelos $\mathcal{C}$, entonces existe un modelo (en la clase $\mathcal{C}$) que satisface cualquier fórmula Σ-consistente, es decir que Σ es completo con respecto a $\mathcal{C}$. El problema entonces se basa en probar que determinado modelo canónico se encuentra en determinada clase de modelos.

En el trabajo vimos que $\mathfrak{M}^c_{LR}$ se encuentra en la clase $\mathcal{M}^{LR}$, con lo cual entonces $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ es completo con respecto a $\mathcal{M}^{LR}$.

¿Qué sucede con el sistema $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$?

Un corolario inmediato del resultado anterior es:

$$\mathfrak{M}^c \vDash \varphi \quad \textit{sii} \quad \mathsf{K}\mathcal{L}_{norm} \vdash \varphi$$

Este resultado nos permite razonar lo siguiente: Si el modelo canónico para un sistema Σ se encuentra contenido en una clase de modelos $\mathcal{C}$, entonces existe un modelo (en la clase $\mathcal{C}$) que satisface cualquier fórmula Σ-consistente, es decir que Σ es completo con respecto a $\mathcal{C}$. El problema entonces se basa en probar que determinado modelo canónico se encuentra en determinada clase de modelos.

En el trabajo vimos que $\mathfrak{M}^c_{LR}$ se encuentra en la clase $\mathcal{M}^{LR}$, con lo cual entonces $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ es completo con respecto a $\mathcal{M}^{LR}$.

¿Qué sucede con el sistema $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$?

Un corolario inmediato del resultado anterior es:

$$\mathfrak{M}^c \vDash \varphi \quad sii \quad \mathsf{K}\mathcal{L}_{norm} \vdash \varphi$$

Este resultado nos permite razonar lo siguiente: Si el modelo canónico para un sistema Σ se encuentra contenido en una clase de modelos $\mathcal{C}$, entonces existe un modelo (en la clase $\mathcal{C}$) que satisface cualquier fórmula Σ-consistente, es decir que Σ es completo con respecto a $\mathcal{C}$. El problema entonces se basa en probar que determinado modelo canónico se encuentra en determinada clase de modelos.

En el trabajo vimos que $\mathfrak{M}^c_{LR}$ se encuentra en la clase $\mathcal{M}^{LR}$, con lo cual entonces $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ es completo con respecto a $\mathcal{M}^{LR}$.

$\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ es completo con respecto a $\mathcal{M}^{LR}$

En el trabajo vimos que $\mathfrak{M}^{c}_{LR}$ se encuentra en la clase $\mathcal{M}^{LR}$, con lo cual entonces $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ es completo con respecto a $\mathcal{M}^{LR}$.

Esto lo hicimos incorporando los (esquemas de) axiomas propios de $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ al modelo canónico y, demostramos que la estructura del modelo canónico *se modifica* acorde a la correspondencia con cada axiomas. Es decir, la introducción de los esquemas,

- $(\mathbf{4}_{Bel})$ provoca que las relaciones $\breve{B}_i$ se tornen transitivas,
- $(\mathbf{5}_{Bel})$ provoca que las relaciones $\breve{B}_i$ se tornen euclidianas,
- $(\mathbf{D}_{*})$ provoca que las relaciones $\breve{B}_i$, $\breve{O}$, $\breve{O}^i$, $\breve{Id}^i$, $\breve{I}_i$ y $\breve{I}^k_i$ se tornen seriales.

Es decir, el modelo canónico para $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ se encuentra en la clase $\mathcal{M}^{LR}$.

$\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ es completo con respecto a $\mathcal{M}^{LR}$

En el trabajo vimos que $\mathfrak{M}^{c}_{LR}$ se encuentra en la clase $\mathcal{M}^{LR}$, con lo cual entonces $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ es completo con respecto a $\mathcal{M}^{LR}$.

Esto lo hicimos incorporando los (esquemas de) axiomas propios de $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ al modelo canónico y, demostramos que la estructura del modelo canónico *se modifica* acorde a la correspondencia con cada axiomas. Es decir, la introducción de los esquemas,

- $(\mathbf{4}_{Bel})$ provoca que las relaciones $\breve{B}_i$ se tornen transitivas,
- $(\mathbf{5}_{Bel})$ provoca que las relaciones $\breve{B}_i$ se tornen euclidianas,
- $(\mathbf{D}_*)$ provoca que las relaciones $\breve{B}_i$, $\breve{O}$, $\breve{O}^i$, $\breve{Id}^i$, $\breve{I}_i$ y $\breve{I}^k_i$ se tornen seriales.

Es decir, el modelo canónico para $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ se encuentra en la clase $\mathcal{M}^{LR}$.

$\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ es completo con respecto a $\mathcal{M}^{LR}$

En el trabajo vimos que $\mathfrak{M}^{c}_{LR}$ se encuentra en la clase $\mathcal{M}^{LR}$, con lo cual entonces $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ es completo con respecto a $\mathcal{M}^{LR}$.

Esto lo hicimos incorporando los (esquemas de) axiomas propios de $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ al modelo canónico y, demostramos que la estructura del modelo canónico *se modifica* acorde a la correspondencia con cada axiomas. Es decir, la introducción de los esquemas,

- ($\mathbf{4}_{Bel}$) provoca que las relaciones $\breve{B}_i$ se tornen transitivas,
- ($\mathbf{5}_{Bel}$) provoca que las relaciones $\breve{B}_i$ se tornen euclidianas,
- ($\mathbf{D}_*$) provoca que las relaciones $\breve{B}_i$, $\breve{O}$, $\breve{O}^i$, $\breve{Id}^i$, $\breve{I}_i$ y $\breve{I}^k_i$ se tornen seriales.

Es decir, el modelo canónico para $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ se encuentra en la clase $\mathcal{M}^{LR}$.

$\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ es completo con respecto a $\mathcal{M}^{LR}$

En el trabajo vimos que $\mathfrak{M}^{c}_{LR}$ se encuentra en la clase $\mathcal{M}^{LR}$, con lo cual entonces $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ es completo con respecto a $\mathcal{M}^{LR}$.

Esto lo hicimos incorporando los (esquemas de) axiomas propios de $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ al modelo canónico y, demostramos que la estructura del modelo canónico *se modifica* acorde a la correspondencia con cada axiomas. Es decir, la introducción de los esquemas,

- ($\mathbf{4}_{Bel}$) provoca que las relaciones $\breve{B}_i$ se tornen transitivas,
- ($\mathbf{5}_{Bel}$) provoca que las relaciones $\breve{B}_i$ se tornen euclidianas,
- ($\mathbf{D}_*$) provoca que las relaciones $\breve{B}_i$, $\breve{O}$, $\breve{O}^i$, $I\breve{d}^i$, $\breve{I}_i$ y $\breve{I}^k_i$ se tornen seriales.

Es decir, el modelo canónico para $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ se encuentra en la clase $\mathcal{M}^{LR}$.

El modelo canónico para $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$

Éste modelo canónico tiene la forma,

$$\mathfrak{M}^c = \left\langle W^c, \{\breve{N}_i^A\}_{i\in A}, \{\breve{N}_i^D\}_{i\in A}, \{\breve{N}_{i,k}^D\}_{i,k\in A}, V^c \right\rangle$$

donde,

W^c es el conjunto de estados $\{\Gamma : \Gamma$ *es un* $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$-CMC$\}$,

V^c es la valuación canónica que definimos anteriormente.

$\breve{N}_i^A(\omega) = \{|\varphi| : \mathrm{Able}_i\, \varphi \in \omega\}$,

$\breve{N}_i^D(\omega) = \{|\varphi| : \mathrm{Does}_i\, \varphi \in \omega\}$,

$\breve{N}_{i,k}^D(\omega) = \{|\varphi| : \mathrm{Does}_i^k\, \varphi \in \omega\}$.

siendo $|\varphi| = \{\Gamma \in W^c : \varphi \in \Gamma\}$.

El modelo canónico para $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$

Éste modelo canónico tiene la forma,

$$\mathfrak{M}^c = \left\langle W^c, \{\breve{N}_i^A\}_{i\in A}, \{\breve{N}_i^D\}_{i\in A}, \{\breve{N}_{i,k}^D\}_{i,k\in A}, V^c \right\rangle$$

donde,

W^c es el conjunto de estados $\{\Gamma : \Gamma$ *es un* $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$-CMC$\}$,

V^c es la valuación canónica que definimos anteriormente.

$\breve{N}_i^A(\omega) = \{|\varphi| : \mathrm{Able}_i\, \varphi \in \omega\}$,

$\breve{N}_i^D(\omega) = \{|\varphi| : \mathrm{Does}_i\, \varphi \in \omega\}$,

$\breve{N}_{i,k}^D(\omega) = \left\{|\varphi| : \mathrm{Does}_i^k\, \varphi \in \omega\right\}$.

siendo $|\varphi| = \{\Gamma \in W^c : \varphi \in \Gamma\}$.

El mismo método de prueba para $\mathsf{C}\mathcal{L}_{non}$

Con el modelo canónico para $\mathsf{C}\mathcal{L}_{non}$ también se cumple el *lema de verdad* y la prueba se realiza de forma análoga a la prueba para $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$, por inducción sobre la fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_{non}$.

Para las formas no-modales de φ, ya sabemos que el lema se cumple. Para las fórmulas modales de $\mathcal{L}_{non}$ se obtiene lo esperado:

$$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \mathrm{Able}_i\, \psi \quad \textit{sii} \quad \mathrm{Able}_i\, \psi \in \omega,$$
$$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \mathrm{Does}_i\, \psi \quad \textit{sii} \quad \mathrm{Does}_i\, \psi \in \omega,$$
$$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \mathrm{Does}_i^k\, \psi \quad \textit{sii} \quad \mathrm{Does}_i^k\, \psi \in \omega.$$

Nuevamente tenemos que *para toda* $\varphi \in \mathcal{L}_{non}$: $\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \varphi$ *sii* $\varphi \in \omega$.

Además éste modelo canónico se encuentra en $\mathscr{M}$, lo que implica que $\mathsf{C}\mathcal{L}_{non}$ es completo con respecto a la clase $\mathscr{M}$.

El mismo método de prueba para $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$

Del resultado anterior también podemos derivar un corolario análogo al que derivamos para el modelo canónico de $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$:

$$\mathfrak{M}^c \vDash \varphi \quad \textit{sii} \quad \mathbf{C}\mathcal{L}_{non} \vdash \varphi$$

Ahora, como ya vimos, para probar la completitud de $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$ con respecto a $\mathscr{M}^{LR}$, alcanza con demostrar que el $\mathfrak{M}^c$ (para $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$) se encuentra en la clase $\mathscr{M}^{LR}$.

Para ello hemos chequeado las propiedades de los mapeos (la estructura del modelo canónico) a medida que incorporamos los axiomas propios de $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$. Y obtuvimos resultados positivos: $\mathfrak{M}^c$ modifica su estructura acorde a los axiomas incorporados obteniendo finalmente un modelo canónico en la clase $\mathscr{M}^{LR}$. Aseguramos así que $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$ es completo con respecto a $\mathscr{M}^{LR}$.

Determinación para los sistemas tratados

Cuando se tiene que *para toda* φ,
$\Sigma \vdash \varphi$ *sii* $\mathcal{C} \vDash \varphi$, se dice que Σ se encuentra *determinado* por $\mathcal{C}$.

Para las pruebas sobre *soundness* en los sistemas *básicos* tratados, hemos dado varias referencias bibliográficas de dónde y cómo se las puede obtener. Además para los sistemas extendidos $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$ y $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$ hemos probado la validez de los esquemas que los caracterizan en las clase de modelos correspondientes. Asegurando así, resultados de *soundness* para los sistemas tratados.
Podemos considerar entonces que:

$\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ se encuentra determinado por $\mathcal{M}$,
$\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ se encuentra determinado por $\mathscr{M}$,
$\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$ se encuentra determinado por $\mathcal{M}^{LR}$,
$\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$ se encuentra determinado por $\mathscr{M}^{LR}$.

Determinación para los sistemas tratados

Cuando se tiene que *para toda* φ,
$\Sigma \vdash \varphi$ *sii* $\mathcal{C} \vDash \varphi$, se dice que Σ se encuentra *determinado* por $\mathcal{C}$.

Para las pruebas sobre *soundness* en los sistemas *básicos* tratados, hemos dado varias referencias bibliográficas de dónde y cómo se las puede obtener. Además para los sistemas extendidos $\mathbf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ y $\mathbf{C}\mathcal{L}^{LR}_{non}$ hemos probado la validez de los esquemas que los caracterizan en las clase de modelos correspondientes. Asegurando así, resultados de *soundness* para los sistemas tratados.

Podemos considerar entonces que:

$\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ se encuentra determinado por $\mathcal{M}$,

$\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ se encuentra determinado por $\mathscr{M}$,

$\mathbf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ se encuentra determinado por $\mathcal{M}^{LR}$,

$\mathbf{C}\mathcal{L}^{LR}_{non}$ se encuentra determinado por $\mathscr{M}^{LR}$.

Determinación para los sistemas tratados

Cuando se tiene que *para toda* φ,
$\Sigma \vdash \varphi$ *sii* $\mathcal{C} \vDash \varphi$, se dice que Σ se encuentra *determinado* por $\mathcal{C}$.

Para las pruebas sobre *soundness* en los sistemas *básicos* tratados, hemos dado varias referencias bibliográficas de dónde y cómo se las puede obtener. Además para los sistemas extendidos $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ y $\mathsf{C}\mathcal{L}^{LR}_{non}$ hemos probado la validez de los esquemas que los caracterizan en las clase de modelos correspondientes. Asegurando así, resultados de *soundness* para los sistemas tratados.
Podemos considerar entonces que:

$\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$ se encuentra determinado por $\mathcal{M}$,
$\mathsf{C}\mathcal{L}_{non}$ se encuentra determinado por $\mathscr{M}$,
$\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ se encuentra determinado por $\mathcal{M}^{LR}$,
$\mathsf{C}\mathcal{L}^{LR}_{non}$ se encuentra determinado por $\mathscr{M}^{LR}$.

Índice

Problemas (clásicos) deseables de automatizar I

Dada una fórmula φ en algún lenguaje particular y una clase de modelos M, desde el punto de vista semántico, los problemas típicos que deseamos automatizar son:

- El *problema de* M-*satisfactibilidad*: consiste en determinar si la fórmula φ es satisfactible (o no) en algún modelo de M.
- El *problema de* M-*validez*: consiste en determinar si la fórmula φ es satisfactible (o no) en todos los modelos de M.

Existe una relación estrecha entre ambos problemas. Si existe un *método efectivo* (m.e.) para resolver el problema de M-satisfactibilidad, entonces existe uno para resolver el problema de M-validez (y vice versa) pues, dado que $\neg\varphi$ no es satisfactible en M si y solo si $M \vDash \varphi$, dado un m.e. para resolver M-satisfactibilidad, podemos utilizarlo para testear la validez de φ usando $\neg\varphi$ como input.

Problemas (clásicos) deseables de automatizar I

Dada una fórmula φ en algún lenguaje particular y una clase de modelos M, desde el punto de vista semántico, los problemas típicos que deseamos automatizar son:

- El *problema de* M-*satisfactibilidad*: consiste en determinar si la fórmula φ es satisfactible (o no) en algún modelo de M.
- El *problema de* M-*validez*: consiste en determinar si la fórmula φ es satisfactible (o no) en todos los modelos de M.

Existe una relación estrecha entre ambos problemas. Si existe un *método efectivo* (m.e.) para resolver el problema de M-satisfactibilidad, entonces existe uno para resolver el problema de M-validez (y vice versa) pues, dado que $\neg\varphi$ no es satisfactible en M si y solo si $\mathrm{M} \vDash \varphi$, dado un m.e. para resolver M-satisfactibilidad, podemos utilizarlo para testear la validez de φ usando $\neg\varphi$ como input.

Problemas (clásicos) deseables de automatizar II

Desde el punto de vista sintáctico, hablaremos de otros problemas que inicialmente parecerán distanciados de los anteriores. Si Σ es una lógica modal y φ una fórmula en su lenguaje,

- El *problema de Σ-consistencia* es determinar si φ es o no Σ-consistente, (¿ $\Sigma \nvdash \neg\varphi$?).
- El *problema de Σ-derivabilidad* es determinar si φ es o no deducible en Σ, (¿ $\Sigma \vdash \varphi$?).

Ahora notemos que si Σ es una lógica modal y M una clase de modelos que la determina, entonces el problema de Σ-consistencia es equivalente al problema de M-satisfactibilidad, y el problema de Σ-derivabilidad es equivalente al problema de M-validez.

Problemas (clásicos) deseables de automatizar II

Desde el punto de vista sintáctico, hablaremos de otros problemas que inicialmente parecerán distanciados de los anteriores. Si Σ es una lógica modal y φ una fórmula en su lenguaje,

- El *problema de Σ-consistencia* es determinar si φ es o no Σ-consistente, (¿ $\Sigma \nvdash \neg\varphi$?).
- El *problema de Σ-derivabilidad* es determinar si φ es o no deducible en Σ, (¿ $\Sigma \vdash \varphi$?).

Ahora notemos que si Σ es una lógica modal y M una clase de modelos que la determina, entonces el problema de Σ-consistencia es equivalente al problema de M-satisfactibilidad, y el problema de Σ-derivabilidad es equivalente al problema de M-validez.

Decibilidad mediante la *propiedad de modelo finito* (f.m.p.)

Se dice que Σ es decidible si los problemas de M-satisfactibilidad y M-validez son decidibles. Un primer paso que puede ayudar a probar la decibilidad es determinar si el sistema posee la *propiedad de modelo finito* (f.m.p.), dado que esta propiedad habilita una aceptable estrategia de prueba.

La f.m.p. la poseen aquellos sistemas de lógica modal que pueden estar *determinados* por una clase de modelos en la cual todos ellos sean finitos.

$$M_{fin} \vDash \varphi \quad sii \quad \Sigma \vdash \varphi$$

F.m.p. y una estrategia de prueba para decibilidad

Si Σ se encuentra determinada por una clase de modelos finitos $\mathrm{M}_{fin} \subseteq \mathrm{M}$, evidentemente no es posible en este sistema expresar fórmulas que requieran de una estructura infinita para su satisfacción. Bajo esta pobreza de expresividad se esconde la principal *fortaleza computacional* de Σ.

¿Cómo lo aprovechamos?: Estrategia (bosquejo), para resolver el problema de M-satisfactibilidad:

- Generamos cada uno de los modelos $\mathfrak{M}$ (finitos), de M.
- Testeamos si para algún ω en algún modelo generado, se da $\mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi$.
- Si así sucediera φ es M-satisfactible, sino, no lo es.

¿Nos alcanza con esto? NO: necesitamos una cota superior para el tamaño de los modelos finitos.

F.m.p. y una estrategia de prueba para decibilidad

Si Σ se encuentra determinada por una clase de modelos finitos $\mathsf{M}_{fin} \subseteq \mathsf{M}$, evidentemente no es posible en este sistema expresar fórmulas que requieran de una estructura infinita para su satisfacción. Bajo esta pobreza de expresividad se esconde la principal *fortaleza computacional* de Σ.

¿Cómo lo aprovechamos?: Estrategia (bosquejo), para resolver el problema de M-satisfactibilidad:

- Generamos cada uno de los modelos $\mathfrak{M}$ (finitos), de M.
- Testeamos si para algún ω en algún modelo generado, se da $\mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi$.
- Si así sucediera φ es M-satisfactible, sino, no lo es.

¿Nos alcanza con esto? NO: necesitamos una cota superior para el tamaño de los modelos finitos.

F.m.p. y una estrategia de prueba para decibilidad

Si Σ se encuentra determinada por una clase de modelos finitos $\mathsf{M}_{fin} \subseteq \mathsf{M}$, evidentemente no es posible en este sistema expresar fórmulas que requieran de una estructura infinita para su satisfacción. Bajo esta pobreza de expresividad se esconde la principal *fortaleza computacional* de Σ.

¿Cómo lo aprovechamos?: Estrategia (bosquejo), para resolver el problema de M-satisfactibilidad:

- Generamos cada uno de los modelos $\mathfrak{M}$ (finitos), de M.
- Testeamos si para algún ω en algún modelo generado, se da $\mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi$.
- Si así sucediera φ es M-satisfactible, sino, no lo es.

¿Nos alcanza con esto? NO: necesitamos una cota superior para el tamaño de los modelos finitos.

Un método para acotar el *tamaño* de los modelos finitos

Existe un método para obtener una clase de modelos finitos *acotados*, que determinen los sistemas que hemos estado viendo aprovechando el trabajo que ya realizamos.

El método se vale de la intrínseca noción de localidad en la interpretación (o evaluación) de las fórmulas mediante la definición de satisfacción en las semánticas que hemos expuesto. Y en relación con esto, dado que la satisfacción de una fórmula depende únicamente de la satisfacción de sus subfórmulas en los estados correspondientes del modelo (def.satisf.), explota la posibilidad de construir una especie de modelo canónico *pequeño*, no constituido por subconjuntos maximales Σ-consistentes de un lenguaje infinito (por ejemplo $\mathcal{L}_{norm}$) sino construidos en base a las subfómulas de la fórmula que pretendamos que éste satisfaga.

Un método para acotar el *tamaño* de los modelos finitos

Existe un método para obtener una clase de modelos finitos *acotados*, que determinen los sistemas que hemos estado viendo aprovechando el trabajo que ya realizamos.

El método se vale de la intrínseca noción de localidad en la interpretación (o evaluación) de las fórmulas mediante la definición de satisfacción en las semánticas que hemos expuesto. Y en relación con esto, dado que la satisfacción de una fórmula depende únicamente de la satisfacción de sus subfórmulas en los estados correspondientes del modelo (def.satisf.), explota la posibilidad de construir una especie de modelo canónico *pequeño*, no constituido por subconjuntos maximales Σ-consistentes de un lenguaje infinito (por ejemplo $\mathcal{L}_{norm}$) sino construidos en base a las subfómulas de la fórmula que pretendamos que éste satisfaga.

Índice

Decibilidad para $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$

El método se basa en adaptar los modelos canónicos para los sistemas tratados y obtener modelos finitos, *acotados*, y en las clases de modelos pretendidas, que satisfagan cualquier fórmula arbitraria y consistente. Es decir, para el caso de $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$:

Si $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm} \nvdash \neg\varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}_\varphi$ *finito y acotado (en* $\mathcal{M}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}_\varphi$ *tales que* $\mathfrak{M}_\varphi, \omega \vDash \varphi$.

Se necesita entonces de los conjuntos $Sub(\varphi)$ (el conj. de subfórmulas de φ) y $Sub^+(\varphi) = Sub(\varphi) \cup \{\neg\psi : \psi \in Sub(\varphi)\}$. Y sea también $Con(\varphi)$ el conjunto de subconjuntos maximales $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$-consistentes de $Sub^+(\varphi)$. Los elementos de $Con(\varphi)$ se pueden obtener mediante un mecanismo análogo al que utilizamos para extender conjuntos consistentes y obtener un CMC (*Lindenbaum*) pero restringiéndonos esta vez solo a las fórmulas en $Sub^+(\varphi)$.

Decibilidad para $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$

El método se basa en adaptar los modelos canónicos para los sistemas tratados y obtener modelos finitos, *acotados*, y en las clases de modelos pretendidas, que satisfagan cualquier fórmula arbitraria y consistente. Es decir, para el caso de $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$:

Si $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm} \nvdash \neg\varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}_\varphi$ *finito y acotado (en* $\mathcal{M}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}_\varphi$ *tales que* $\mathfrak{M}_\varphi, \omega \vDash \varphi$.

Se necesita entonces de los conjuntos $Sub(\varphi)$ (el conj. de subfórmulas de φ) y $Sub^+(\varphi) = Sub(\varphi) \cup \{\neg\psi : \psi \in Sub(\varphi)\}$. Y sea también $Con(\varphi)$ el conjunto de subconjuntos maximales $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$-consistentes de $Sub^+(\varphi)$. Los elementos de $Con(\varphi)$ se pueden obtener mediante un mecanismo análogo al que utilizamos para extender conjuntos consistentes y obtener un CMC (*Lindenbaum*) pero restringiéndonos esta vez solo a las fórmulas en $Sub^+(\varphi)$.

Decibilidad para $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$ (el mini modelo canónico)

Siendo los elementos de $Con(\varphi)$ consistentes, cualquiera de ellos contiene a ψ o a $\neg\psi$ para cualquier fórmula $\psi \in Sub(\varphi)$, pero no podría contener a ambas por ser consistente. De esta manera la cardinalidad de $Con(\varphi)$ es a lo sumo $2^{|Sub(\varphi)|}$, que a su vez se encuentra acotada por $2^{|\varphi|}$ dado que $|Sub(\varphi)| \leq |\varphi|$.

$\mathfrak{M}_\varphi$ tiene la forma,

$$\mathfrak{M}_\varphi = \left\langle W_\varphi, \breve{G}_i, \breve{B}_i, \breve{O}, \breve{O}^i, I\breve{d}^i, \breve{I}_i, \breve{I}_i^k, V^c \right\rangle$$

donde $W_\varphi = \{\Gamma : \Gamma \in Con(\varphi)\}$ y el resto de los componentes son idénticos al modelo canónico $\mathfrak{M}^c$ para $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$. $\mathfrak{M}_\varphi$ se comporta de igual manera que $\mathfrak{M}^c$ y se puede demostrar de forma análoga el lema de verdad como vimos con $\mathfrak{M}^c$.

Decibilidad para $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$ (el lema de verdad)

Se puede demostrar entonces un análogo al lema de verdad que vimos anteriormente:

Si $\omega \in W_\varphi$, *entonces para toda* $\psi \in Sub(\varphi)$ *se tiene* $\mathfrak{M}_\varphi, \omega \vDash \psi$ *sii* $\psi \in \omega$.

De lo cual inferimos que:

Si $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$ *es* $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$*-consistente, entonces* φ *es satisfactible en un modelo finito de la clase* $\mathcal{M}$ *con a lo sumo* $2^{|\varphi|}$ *estados.*

Esto nos alcanza para asegurar que $\mathsf{K}\mathcal{L}_{norm}$ posee la f.m.p. *fuerte* y además es completo con respecto a la clase $\mathcal{M}_{fin}$.

¿Y $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$?

El *mini* modelo canónico para $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$, $\mathfrak{M}^{LR}_{\varphi}$ necesita algunas modificaciones para que se puede demostrar el lema de verdad y además obtener un modelo en la clase $\mathcal{M}^{LR}$.

En primera instancia el dominio de $\mathfrak{M}^{LR}_{\varphi}$ se compone de subconjuntos maximales $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$-consistentes *de* $Sub^{+}(\varphi)$. Por otro lado la finitud del dominio provoca la pérdida de algunas propiedades de las relaciones canónicas $\breve{B}_i$, pero estas se pueden redefinir para volver a obtener un modelo en $\mathcal{M}^{LR}$. Sin embargo esta redefinición nos exige modificar la prueba del lema de verdad cuando tratemos fórmulas de la forma $\mathrm{Bel}_i\,\varphi$.

Esto alcanza para demostrar que,
Si $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$ es $\mathsf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$-consistente, entonces φ es satisfactible en un modelo finito de la clase $\mathcal{M}^{LR}$ con a lo sumo $2^{|\varphi|}$ estados.

Revisamos la estrategia para el problema de satisfactibilidad

- Generamos cada uno de los modelos finitos $\mathfrak{M}$ (con hasta a lo sumo $2^{|\varphi|}$ estados), en M. (Hay una cantidad finita de estos modelos).
- A medida que los generamos, chequeamos que cada $\mathfrak{M}$ se encuentre en M, (especialmente en el caso de los sistemas no-básicos). (Otra tarea finita pues los modelos lo son).
- Si $\mathfrak{M}$ se encuentra en M, testeamos si para algún ω de $\mathfrak{M}$, se da $\mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi$. (Otra tarea finita pues tanto φ como $\mathfrak{M}$ son finitos).
- Si así sucediera φ es M-satisfactible, sino, continuamos con la generación de modelos.

Índice

Decibilidad para $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ y $\mathbf{C}\mathcal{L}^{LR}_{non}$

La decibilidad en estos sistemas se puede demostrar siguiendo el mismo enfoque que en el caso de los sistemas $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}/\mathbf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$, es decir, probar que poseen la f.m.p. y luego describir un m.e. análogo al desarrollado para decidir los problemas de $\mathcal{M}$-satisfactibilidad/ $\mathcal{M}^{LR}$-satisfactibilidad. Para la f.m.p. se pueden modificar los modelos mínimos y obtener otra especie de *mini* modelo *acotado* mediante la técnica de *filtrado*.

Otra alternativa de prueba existe en la literatura, que permite acudir directamente al resultado, pues se ha demostrado que los sistemas de lógica modal clásica no iterativas, de las cuales $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ y $\mathbf{C}\mathcal{L}^{LR}_{non}$ son instancias, poseen la f.m.p.

Sumario

- Los (sub)sistemas estudiados son completos con respecto a las semánticas pretendidas.
- Los (sub)sistemas estudiados son decidibles.

- Perspectiva (a futuro...)
  - Dominar algún *método de combinación de lógicas* que permita recombinar hacia el sistema original y transferir los resultados de completitud y decibilidad. (Algo de esto se ha estado estudiando).
  - *Implementar* los sistemas estudiados, algunas cosas hay hechas con respecto a chequeadores de modelos.
  - Utilizar alguna alternativa que permita trabajar con todos los operadores de $\mathcal{L}$ bajo un mismo sistema semántico y evitar la problemática de recombinación. (Algo de esto se ha estudiado también).

Explicación mas precisa de derivación

El proceso deductivo es capturado por lo que se entiende como una *derivación* (*demostración*, *prueba*) en el sistema de lógica modal Σ[1]: esto es una sucesión finita de fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, donde cada φ_i $(\forall i\ , 1 \leqslant i \leqslant n)$ es una instancia de alguno de los esquemas de axiomas de Σ o se deduce de dos miembros anteriores de la sucesión, por ejemplo φ_j y φ_k $(j < i,\ k < i)$ por aplicación directa de alguna de las reglas de deducción. Se dice entonces que tal sucesión es una derivación[2] de φ_n en Σ, y que φ_n es un *teorema* de Σ[3]. Cuando la fórmula φ se obtiene mediante una derivación en Σ, se escribe $\Sigma \vdash \varphi$, y se dice, φ es *derivable*[4] en Σ.

▸ sist. de lóg. modal

[1] Utilizaremos el símbolo Σ como variable sobre conjuntos de fórmulas que son sistemas de lógica modal.

[2] O *demostración*, o *prueba*.

[3] Cuando consideramos a Σ como un conjunto de fórmulas cerrado por determinadas reglas, φ es un teorema de Σ si y solo si $\varphi \in \Sigma$.

[4] O *probable*, o *deducible*, o *demostrable*.